## 單元 13：伯努利、二項、幾何及泊松分佈

### 13.1 隨機變量、概率函數和離散概率分佈

(i) 教師應透過日常生活例子講解隨機變量的概念。

(ii) 跟著可討論離散隨機變量，至於連續隨機變量可留待教授正態分佈後才一併研究。

離散及連續隨機變量的基本分別是：

離散隨機變量 — 過程與數算有關，取值能夠一一列舉出來，例如：
(a) 一場籃球比賽某隊所得的總分
(b) 在一小時內某城市所錄得的交通意外數目
(c) 每年所訂閱雜誌的數目

連續隨機變量 — 過程與量度有關，取值由量度而得，例如：
(a) 日落時間
(b) 一袋米的平均重量
(c) 體溫

(iii) 可用簡單例子說明離散概率分佈，如：
(a) 一本書內某一頁的錯字數目
(b) 每班學生內左撇子學生的數目

(iv) 教師應指出隨機變量的平均值與方差的定義。須加強學生明白平均值及方差是用來描述一組數據的中心趨勢及離散度。

### 13.2 伯努利分佈

伯努利分佈適用於只有兩種結果 (成功 / 失敗) 的實驗。日常生活例子如：

(i) 一位沒有溫習的學生而能猜中選擇題的答案。
(ii) 隨機地在一班學生內抽出左撇子的學生。

伯努利分佈的概率函數為：

$$f(x; p) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

其中 $p$ 為成功的概率。
平均值 $= p$；方差 $= p(1-p)$。

## 13.3 二項分佈

二項分佈可有 $n$ 個獨立及相同的伯努利試驗產生，其中 $p$ 為每一次試驗成功的概率。例如：在 10 題考試選擇題目當中，某學生猜中正確答案的題數的分佈。

二項分佈的概率函數為：

$$f(x;\, n,\, p) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

平均值 $= np$，方差 $= \sigma^2 = np(1-p)$ 。無須證明。
二項分佈可用 $\mathrm{Bi}(n,\, p)$ 或 $\mathrm{Bi}(x;\, n,\, p)$ 來表示。

無須運用二項分佈表。

## 13.4 幾何分佈

幾何分佈是在連續 $x$ 次獨立及相同的伯努利試驗中最後一次才得到成功的分佈。例如：一份選擇試題當中，學生直至第 $x$ 題才猜中正確答案的分佈。

幾何分佈的概率函數為：

$$f(x;\, p) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1,\, 2,\, \ldots$$

平均值 $= \mu = \dfrac{1}{p}$，方差 $= \sigma^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$。無須證明。

學生須知道幾何分佈與二項分佈的異同：

$x$ 次試驗中最後一次得到成功的分佈→幾何分佈
在 $n$ 次試驗中得到 $x$ 次成功的分佈→二項分佈

## 13.5 泊松分佈

泊松分佈是探討某一事件在某段時間或空間發生的次數的概率分佈。實際生活中許多隨機變量都符合泊松分佈，例如：

(i) 一油站在一分鐘內汽車抵達的數目
(ii) 於繁忙時間的五分鐘內排隊等巴士的乘客增加數目
(iii) 某電話台於 30 秒內接到來電的次數
(iv) 一本書內某一頁的錯字數目
(v) 擊中目標的炸彈數目

泊松分佈的概率函數為：

$$f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots; \quad \lambda > 0$$

泊松分佈可用 $\mathrm{Po}(x;\lambda)$ 或 $\mathrm{Po}(\lambda)$ 來表示。

平均值 $=\lambda$，方差 $=\sigma^2=\lambda$。無須證明。

泊松分佈一般建基於以下的假設：

(i) 事件隨機地發生於某段時間或空間內
(ii) 某一刻中，事件最多只會發生一次
(iii) 事件以一常數率 $\lambda$ 發生於某段時間或空間內
(iv) 事件之間獨立地發生

泊松分佈其實為二項分佈的極限形態，當 $n\to\infty$ 而 $p\to 0$ 並
平均值 $=np=\lambda=$ 常數時。

無須運用泊松分佈表。

## 13.6 伯努利、二項、幾何及泊松分佈的應用

講授本單元時，宜著重以生活實例為討論素材。

**二項合佈**

例一
若一推銷員隨機地從電話簿中抽取顧客推銷訂閱雜誌，成功率為 0.1 。某晚，推銷員作出 6 次電話推銷，問以下事件發生的概率：
(i) 沒有人訂閱雜誌；
(ii) 剛好 3 人訂閱雜誌；
(iii) 最少有 3 人訂閱雜誌；
(iv) 最多有 3 人訂閱雜誌。

**幾何分佈**

例一
設一學生在測驗的每一次的合格率為 0.6 。求他於第二次測驗才合格的概率。

例二
設香港天文台每天正確預測天氣的概率為 0.8 。求在未來數天，直至第 4 天才能作出正確預測的概率。

**泊松分佈**

例一
一保險公司發現，每天因遺失物品或受傷而要求賠償的個案之平均值為 3.1。求下列事件發生於某天的概率：

(i) 少於 2 個索價個案；
(ii) 剛好 2 個索償個案；

(iii) 2 個或更多的索償個案；
(iv) 多於 2 個索償個案。

例二

根據以往經驗，1% 的電話費單會寄失。現取 10 張電話費單作為樣本，求最少一張會寄失的概率。請用兩種概率分佈函數 (二項分佈與泊松分佈) 來解題，及簡略比較與解釋其結果。