单元 2：二项展式

2.1 当 n 为正整数时 $(1+x)^n$ 的展式 $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r$

这公式让学生不用进行实际的乘法而能写下展式。不用介绍展式的形式化证明，亦无须提及最大项与系数间的关系。二项展式的性质应包括：

(i) 展式共有 $n+1$ 项；
(ii) 二项系数 C_r^n 全是整数。

应研究帕斯卡三角形与展式中系数 C_r^n 的关系。

学生须学会

$$\sum_{r=1}^{n}(ax_r \pm by_r)=a\sum_{r=1}^{n}x_r \pm b\sum_{r=1}^{n}y_r$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left(x_r \pm y_r\right)^2=\sum_{r=1}^{n}{x_r}^2 \pm 2\sum_{r=1}^{n}x_r y_r+\sum_{r=1}^{n}{y_r}^2$$

<u>例一</u>
用三项展式去求 $(1.01)^{10}$ 的约数值。

<u>例二</u>
可重复运用二项展式求得多项展式。

<u>例三</u>
可应用二项展式解决概率问题 (单元 13)。

<u>例四</u>
自然对数的底 e (单元 3) 是由二项展式算得。

<u>例五</u>
统计常态分布的公式 (单元 14) 也是由二项展式算得。

2.2 当 n 为非正整数且 $|x|<1$ 时 $(1+x)^n$ 的展式

学生应学习展式通项，即第 $(r+1)$ 项系数 $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 的变化。
当 n 为一正整数及 r 这 $n+1$，系数等于零。
当 n 为一非正整数，系数永不等于零。

在后者的情况下，展式为

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots \quad -1<x<1$$

为使学生明了这无穷级数只在 $-1 < x < 1$ 时成立，教师可用以下例子讲解：

考虑展式

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^r + \cdots.$$

代入 $x = -1$，可得

右方 $= \begin{cases} 0, & \text{项数为双数} \\ 1, & \text{项数为单数} \end{cases}$

但左方 $= [1-(-1)]^{-1} = \dfrac{1}{2}$

教师应教授绝对值的定义，及与学生讨论收敛性和发散性的直观意义。

学生应学习展开一些当 n 为非正整数的二项式，如

(i) $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2!}x^2 + \dfrac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{3!}x^3 + \cdots$

(ii) $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

学生应能以升幂将展式如 $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2}$ 展开至某个指定的项数。

<u>例一</u>

二项展式应用于求某些数式的近似值。

<u>例二</u>

二项展式可应用于学习指数级数 (单元 3)。

<u>例三</u>

可利用二项展式求得一个指定项数的多项式，从而求出有理函数如 $\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^2}$ 在某指定 x 值范围内的近似值。