单元 6：微分法

6.1 基本微分法法则

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k=0$，$k$ 为常数

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=nx^{n-1}$，$n$ 为实数 (幂法则)

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[kf(x)\right]=k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$，$k$ 为常数

(iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\pm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$ (和、差法则)

(v) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(x)\right]=g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)+f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$ (积法则)

(vi) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)-f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)}{g^2(x)}$，其中 $g(x)\neq 0$ (商法则)

无须证明法则。

6.2 复合函数和逆函数的微分法

教师应用例子帮助学生掌握复合函数、逆函数、显函数及隐函数的基本概念。
可将复合函数看成某函数值的函数。

<u>例一</u>

储存于仓库的 n 箱蘑菇 t 日后的腐坏数目以函数 $n(t)=2t-\frac{1}{8}t^2$ 表示，其中 $0\leq t\leq 8$。种植 n 箱蘑菇的成本 C 以函数 $C(n) = 20 + 30n$ 表示。因蘑菇腐坏而需弃掉所带来的损失可看作复合函数。

逆函数可看作是应变量与自变量的角色改变。函数 $y=f(x)$ 的逆函数的记号是 $x=f^{-1}(y)$，其中 f^{-1} 代表逆函数而不是 $\frac{1}{f}$。一个明显例子是 e^x 乃 $\ln x$ 的逆函数，反之亦然。教师可向能力较高的学生说明逆函数的存在条件。

教师应介绍链式法则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 及逆函数法则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$ 以求复合函数及逆函数的导数，但无须给予详尽证明，只需提供充分的应用题以作示范。

学生应学懂如何分辨显函数与隐函数。

<u>例二</u>

一半径为 y cm、高度为 x cm 的圆柱体，总表面面积为 24π cm^2。半径与高度的隐性表示式为 $y^2+xy-12=0$。通过解方程，我们求得函数 y 的显性表示式 $y=\dfrac{-x+\sqrt{x^2+48}}{2}$。

在介绍隐函数的微分法前，教师应举出一些不容易或不可能将 y 以 x 显性形式表示的方程 $f(x,y)=0$，例如：$x^5-x^3y+y^3-y^4+1=0$。

<u>例三</u>

设某货品的需求数量 x 件与价钱 $\$P$ 的关系式为 $x^2+5xP+25P^2=4500$。从这个例子，很容易看到隐函数微分法的方便之处。

学生应懂得采用链式法则、逆函数法则及隐函数微分法去解决涉及简单指数函数和对数函数的问题。但参数方程的微分法则不包括在内。

6.3 e^x 和 $\ln x$ 的微分法

将无穷级数 $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ 两侧逐项求导数，凭此可以引出这个法则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x=e^x$。

将 $\ln x$ 视为 e^x 的逆函数，利用逆函数法则，可证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)=\dfrac{1}{x}$。

遇上较复杂的函数，尤其是当指数包含有变量时，用对数微分法求导数会较容易。例子包括求 $y=\dfrac{\sqrt{2x-3}e^{-3x}}{(4x+5)^2}$，$y=e^{x^2}$，$y=\log_a\sqrt{x+1}$ 及 $y=x^x$ 的导数。

学生应能利用链式法则演绎出以下公式：

(i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{f(x)}=e^{f(x)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

函数如 xe^{x^2+1} 及 $\ln\sqrt{3x^2-5x+7}$ 类型的微分法应包括在需要演绎之列，但三角函数的微分法则并不需要。

6.4 二阶导数

学生应学习记号 $f''(x)$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 的意义，教师应强调 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\neq\frac{1}{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}}$。至于高阶导数并不在课程之内。